06/12/2016

Γενίκευση του συστήματος Sturm - Liouville

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών : $\underbrace{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y}_{L(y)} + \lambda w(x) y = 0$ (γραμμικός όρος)

(ανεξάρτητη μεταβλητή το x, εξαρτημένη μεταβλητή το y)

με συνοριακές συνθήκες : $\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 p(a) y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 p(b) y'(b) = 0 \end{cases}$, με $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$

- Η y έχει πεδίο ορισμού το $[a,b]$.

1) Συνθήκη για την y, $y(a) = 0$, Dirichlet
2) Συνθήκη για την y', $y'(a) = 1$, Neumann.
3) Συνθήκη μικτού τύπου, $ay(a) + by'(a) = 0$, Robin.

Τότε το πρόβλημα Sturm - Liouville καλείται:

(a) Κανονικό (Regular) αν p και $w > 0$, στο $[a,b]$
(b) Ιδιάζον (Singular) αν $p > 0$ και $p(a) = p(b) = 0$ και $w > 0$.
(c) Περιοδικό (Periodic) αν $p(a) = p(b)$, $w > 0$, $p > 0$ και $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε 2ης τάξης γραμμικός τελεστής μπορεί να γραφεί στη μορφή Sturm - Liouville.

ΑΠΟΔ

Θεωρούμε την Δ.Ε. : $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \Rightarrow$

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{f}{a_2}$$

Έστω η συνάρτηση βάρους, $w(x)$, τέτοια ώστε :

$$\Rightarrow w y'' + w\frac{a_1}{a_2} y' + w\frac{a_0}{a_2} y = w\frac{f}{a_2}$$

Θα ήθελα να ισχύει: $wy'' + w\frac{a_1}{a_2} y' = (wy')' = wy'' + w'y'$, δηλαδή $w\frac{a_1}{a_2} = w'$

Τότε το αρχικό πρόβλημα γράφεται στη μορφή :

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x) y = F(x), \quad p(x) = e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}, \quad q(x) = p(x)\frac{a_0}{a_1}, \quad F(x) = p(x)\frac{f}{a_2}$$

Άρα η Δ.Ε. $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = F(x)$ είναι μια Δ.Ε. Sturm - Liouville

Ιδιότητες

1) Αν υπάρχουν ιδιοτιμές τότε είναι πραγματικές

ΑΠΟΔ

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε $L[y] + \lambda w y = 0$ και αντίστοιχα για τις συνοριακές συνθήκες.

$L[\bar{y}] + \bar{\lambda} w \bar{y} = 0$

$$\left.\begin{aligned} L[y]\bar{y} + \lambda w |y|^2 = 0 \\ L[\bar{y}]y + \bar{\lambda} w |y|^2 = 0 \end{aligned}\right\}(-) \Rightarrow \underbrace{p(y'\bar{y} - \bar{y}'y)\Big|_a^b}_{\text{συνοριακές συνθήκες}} = 0 = (\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b w|y|^2 dx = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})\underbrace{\int_a^b w|y|^2 dx}_{\langle y|y\rangle = \|y\|^2} = 0 \xrightarrow[\|y\|^2 \neq 0]{\text{γιατί}} \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $w(x)$

ΑΠΟΔ

Έστω u, v ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda, \mu \ (\lambda \neq \mu)$ του συνόλου των ιδιοτιμών. Όπως και πριν:

$$\underbrace{\left[p(u'v - v'u)\right]_a^b}_{0,\ \text{από συνοριακές συνθήκες}} = -(\lambda - \mu)\int_a^b wuv\,dx \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\int_a^b wuv\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b wuv\,dx = 0$$

Άρα u, v είναι ορθογώνιες.

Παρατήρηση: Δηλαδή, ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες, ως προς μια συνάρτηση βάρους. Δηλαδή, ορίζοντας το εσωτερικό γινόμενο: $\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\,dx$.

Οι ιδιοσυναρτήσεις, Φ_n, ικανοποιούν τη σχέση: $\langle \Phi_n|\Phi_m\rangle = \langle \Phi_n, \Phi_m\rangle$ όπου

3) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων είναι πλήρες. Δηλαδή, κάθε $f(x)$, μπορεί να γραφεί ως: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n$, όπου $C_n = \dfrac{\langle f|\Phi_n\rangle}{\|\Phi_n\|^2}$

(πχ Σειρές Fourier)

Η συνάρτηση Γαμμα

Ορισμός: Ο ορισμός αυτός δόθηκε από τον Euler:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z, \quad z \neq 0,-1,-2,-3,\dots$$

Βάση του ορισμού:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)(z+n+1)} n^{z+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z}_{\Gamma(z)} \frac{z}{z+n+1} n \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \quad (1)$$

Επίσης: $\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)} n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(2) \overset{(1)}{=} 1\cdot\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = 2!$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot\Gamma(2) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = 3!$

$\vdots$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

Δηλαδή, για z: θετικό ακέραιο, $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$ (2)

Ορισμός: Ο 2ος ορισμός της συνάρτησης Γάμμα, δίνεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad Re(z) > 0$$

Μέσω της αντικατάστασης, $t = x^2$:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_0^\infty 2x e^{-x^2} x^{2z-2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1}\, dx \quad (3)$$

Επίσης, αν κάνουμε την αντικατάσταση $t = -\ln x$:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_1^0 e^{\ln x} (-\ln x)^{z-1} \left(-\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1}\, dx = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx \quad (4)$$

Αποδεικνύεται ότι οι ορισμοί (3) και (4) είναι ισοδύναμοι!

Ιδιότητες:

1) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

ΑΠΟΔ

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \xrightarrow[\text{ή } t = x^2]{\text{θέτουμε } x = \sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} 2x\, dx = 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx}_{I} \quad (*)$$

Ορίζουμε ως $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, ώστε:

$$I^2=I\cdot I=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy \overset{\text{πολικές}}{=\!=} \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}2r\,dr \overset{R=r^2}{=\!=} \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-R}dR=\frac{\pi}{4}\left[-e^{-R}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4}$$

Άρα $I^2=I\cdot I=\frac{\pi}{4} \Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Αντικαθιστώντας στην (*) $\Gamma(1/2)=2I=2\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Η συνάρτηση Βήτα

Ορισμός: Ορίζουμε την συνάρτηση, $B(\omega,n)$, ως το ολοκλήρωμα:

$$B(\omega,n)=\int_0^1 x^{\omega-1}(1-x)^{n-1}dx \quad (1)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για $\omega,n>0$.

Ακόμα, μπορούμε ν.δ.ο. : $B(\omega,n)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2\omega-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta \quad (2)$

ΑΠΟΔ (Πώς πηγαίνουμε από τη σχέση (1) στην (2))

Θέτουμε $x=\sin^2\theta$, $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ και:

$$B(\omega,n)=\int_0^1 x^{\omega-1}(1-x)^{n-1}dx=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2\omega-2}(\cos\theta)^{2n-2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2\omega-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta$$

- Μπορούμε να συσχετίσουμε την συνάρτηση, $\Gamma(\omega)$, με την συνάρτηση, $B(\omega,n)$.

Η σχέση των 2 συναρτήσεων είναι η εξής:

$$B(\omega,n)=\frac{\Gamma(\omega)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\omega+n)}, \quad \omega,n>0.$$